

Il principio variazionale di Leibniz

Autore: Renato Nobili
Dipartimento di Fisica "G. Galilei" - Università di Padova

Indice:

1. L'origine del razionalismo
2. La filosofia del principio variazionale
3. Sull'Origine Primordiale delle Cose
4. La meccanica del principio variazionale
5. Principio Unico di Ottica, Catottrica e Diottrica
6. Il principio di minima azione di Maupertuis
7. Il determinismo ben temperato di Eulero
8. Il destino quantistico del principio di concorrenza dei possibili

1. L'origine del razionalismo

Nel *Discorso di Metafisica*¹ Leibniz riporta un passo del *Fedone*² di Platone in cui si enuncia, per bocca di Socrate, il *principio di ottimalità*. Nel testo di Platone, Socrate, dialogando con Cibete, racconta di aver saputo che Anassagora andava sostenendo che vi è una mente creatrice e ordinatrice di tutte le cose e che si aspettava che avrebbe aggiunto:

... se le cose stanno così, allora la mente - in quanto ordina - ordina tutte le cose e le dispone in modo che ognuna si trovi al meglio. ...

Credevo ... che mi avrebbe fatto capire in primo luogo se la terra è piatta o rotonda, e quando me l'avesse fatto capire, me ne avrebbe poi totalmente spiegato la necessità e la causa, dicendomi del modo che è ottimo e che l'ottimo è che essa sia di tal genere; e se avesse affermato che essa è in posizione centrale, m'avrebbe poi spiegato completamente perché l'ottimo è che essa si trovi proprio nel centro. Se egli mi avesse rivelato questi fatti, sarei stato totalmente disposto a non andare a cercare nessun'altra causa. E appunto, anche riguardo il sole, la luna e gli altri astri, le loro velocità reciproche, le loro rivoluzioni e tutti gli altri fenomeni, ero totalmente disposto ad averne spiegazioni dello stesso tipo: per quale causa è per essi la condizione più valida che ciascuno agisca e subisca quello che agisce e subisce. Perché non avrei mai creduto che proprio lui, che affermava che le cose si trovano nell'ordine assegnato loro dalla mente, introducesse per esse qualche altra causa che non fosse che il modo migliore di essere è che esse stiano come stanno, dando quindi a ciascuna di esse singolarmente, e a tutte quante insieme, questa causa, e credevo dunque che mi avrebbe spiegato ciò che è il meglio per ciascuna e il bene per tutte. E poiché non avrei rinunciato a queste speranze per tutto l'oro del mondo, mi buttai a capofitto sui suoi libri leggendoli il più rapidamente possibile, per venire a conoscere al più presto ciò che è il meglio o il peggio.

Ma ecco, caro amico, che mi sentii allontanare da quella meravigliosa speranza quando, procedendo nella lettura, trovai un uomo che non fa affatto ricorso alla mente e non gli attribuisce capacità causali effettive nel dare ordine alle cose, ma che invece invoca arie, eteri, acque e molte altre cose che sarebbe fuori luogo chiamare cause.

... [Alla fine, non essendo io stesso stato capace di trovare ciò che mi aspettavo (sunto dell'autore)],
... senza più vele, cominciai a darmi da fare per andare alla ricerca delle cause navigando a remi³.

¹ G.W.Leibniz, *Discorso di Metafisica*, 1686, XX, a cura di Andrea Sani, La nuova Italia, 1995,

² Platone, *Fedone*, passi XLVIIb-XLIXc, testo riscritto dall'autore sulla base di due diverse traduzioni.

³ Si noti che nel discorso socratico qui riportato il concetto di *causa* corrisponde in realtà a quello di *ragione*. In definitiva, la stessa figura della *mente* corrisponde a quella che due millenni dopo Leibniz identificherà con la *Ragione Sufficiente*.

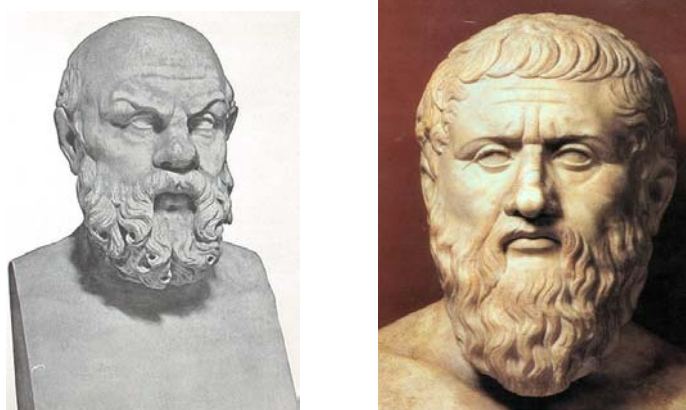


Fig.1. Socrate (469-399 a.C.) e Platone (427-347, a.C.).

Il buon Socrate avrebbe dovuto remare assai a lungo per riuscire ad approdare alla meta desiderata. La causa della difficoltà è chiara. Per formulare una teoria fisica sulla base di un principio di ottimalità, bisognava in primo luogo saper definire un sistema di possibilità logiche che permettessero di enunciare e rappresentare in modo non contraddittorio tutto ciò che può essere sensatamente ipotizzato in relazione a un certo contesto di fatti naturali. Bisognava inoltre essere capaci di stabilire una corrispondenza tra le possibilità logiche e le possibilità fisiche, al fine di descrivere con sufficiente precisione tutto e solo ciò che può concretamente accadere in quel contesto. Socrate e Platone non erano in grado di farlo semplicemente perché il concetto di possibilità fisica era ancora mal definito.

La risposta a Socrate non poteva essere trovata nell'idealismo matematico di Platone ma nella teoria del *possibile* di Aristotele, che può essere riformulata in questo modo: tra tutte le configurazioni *possibili* di un sistema fisico (che sono *in potenza* in questo sistema), quella che si *realizza* (che si presenta *in atto*) soddisfa ad una condizione di ottimalità, che quasi sempre coincide con la configurazione più simmetrica. In conformità a questo principio Euclide (~365-300 a.C.) riuscì a spiegare la propagazione della luce e Archimede (~287-212 a.C.) a costruire la teoria della bilancia e della leva⁴.

2. La filosofia del principio variazionale

Lebniz si propose di riformulare con grande rigore logico la visuale razionalista sulla base delle conoscenze scientifiche della sua epoca, portando alle estreme conseguenze ciò che era già implicito nella concezione deterministica del mondo fisico. La novità stava soprattutto nel fatto che le *possibilità* di un sistema fisico non dovevano essere semplicemente le configurazioni spaziali, come nella fisica antica, ma quelle spaziotemporali della nuova meccanica, precisamente i cammini che lo stato di un sistema fisico può percorrere con varie leggi orarie nello spazio degli stati.

Alcuni scritti del grande pensatore tedesco rivelano meglio di altri il filo del ragionamento che lo condusse ad enunciare il *principio di concorrenza dei possibili* e quello del *cammino più facile o di minima resistenza*, vale a dire il principio variazionale di Leibniz. Questo secondo si applica eguagliando a zero la variazione di una funzione del cammino nello spazio degli stati. Nella visione di Leibniz, questa funzione doveva rappresentare una sorta di potere costringitivo, impropriamente chiamato “resistenza”, che sarebbe esercitato dai mezzi materiali sulle particelle in moto in modo da aumentarne la velocità.

⁴ E.Mach (1883) *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Edizioni Boringhieri 1977.

La revisione leibniziana della metafisica aristotelica ebbe un'importanza fondamentale per la fisica teorica in quanto divenne il fondamento filosofico della meccanica analitica di Eulero e Lagrange. Come sarà spiegato alla fine di questo articolo, la rilevanza della teoria di Leibniz sta nel fatto che oggi il principio di concorrenza dei possibili trova la sua naturale spiegazione fisica come limite ottico-geometrico del principio di sovrapposizione degli stati della meccanica quantistica. Le ampiezze d'onda della meccanica quantistica rappresentano infatti i possibili cammini degli stati nello spazio degli stati.



Fig.2. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).

Leibniz sviluppò la visione razionalista assai oltre il livello raggiunto del mondo antico, non solo perché la fisica del suo tempo era molto più evoluta di quella antica, ma anche perché combinava in modo nuovo e originale l'idealismo platonico col materialismo aristotelico, che erano spesso intesi come visuali filosofiche opposte.

Del resto, la sua concezione di un mondo spirituale *ideale* governato da “cause” finali (vale a dire da implicazioni logiche) esistente in parallelo con un mondo fisico *reale* governato da cause efficienti (vale a dire da forze meccaniche), mirava a stabilire una sintesi tra quelle due posizioni filosofiche. Per questa ragione, il dualismo *idealismo-realismo*, propugnato da Leibniz o, in termini più convenzionali, il dualismo *spirito-materia*, fu il punto di arrivo necessario del pensiero moderno classico. Il seguente paragrafo riassume nel modo più chiaro la visione filosofica di Leibniz.

3. Sull'Origine Primordiale delle Cose⁵

Sopra il mondo, ovvero l'aggregato delle cose finite, si dà una certa Unità dominante, non tanto come l'anima in me stesso, quanto piuttosto come l'Io nel mio corpo, ma in verità assai più elevata nella ragione.

Poiché l'Unità dominante non tanto regge il mondo, quanto piuttosto produce ed opera al di sopra del mondo - ed è, per così dire, extramondana - in fin dei conti essa è la ragione ultima delle cose. Infatti non solo in alcuna delle cose singole, ma nemmeno in ogni aggregato e successione di cose può trovarsi la ragione della loro esistenza.

Supponiamo che vi sia un Libro Infinito di Elementi Geometrici, nel quale ogni cosa sia descritta come conseguenza di qualche altra cosa. È chiaro che, sebbene si possa rendere ragione del capitolo presente mediante quello precedente, tuttavia, a qualunque capitolo si retroceda, non si perverrà mai ad una ragione completa; benché sarebbe lecito meravigliarsi che tali libri esistano da sempre, che possano conoscersi e che siano stati scritti in tale modo.

Ciò che è vero per i capitoli del libro lo è anche per i diversi stati del mondo, il successivo infatti essendo in qualche modo descritto dal precedente (tuttavia secondo certe regole del mutamento). Infatti, comunque si retroceda a stati anteriori, giammai si potrà reperire negli stati la ragione completa: che si debba conoscere qualcosa di più che il mondo, e perché proprio tale cosa.

Si supponga ora che il mondo sia eterno, che null'altro si ponga se non la successione degli stati, in nessuno dei quali si reperisce un ragione sufficiente, anzi tali che, per quanti se ne assumano non si progredisce minimamente verso la ragione da rendere, allora è evidente che la ragione deve cercarsi altrove. Nelle cose eterne, infatti, sebbene non vi sia alcuna causa, tuttavia vi è una ragione da comprendere, la quale nelle cose persistenti è la stessa necessità o essenza, mentre nella successione

⁵ Leibniz, G.W. (1697). *De Rerum Originatione Radicali*, 182. Traduzione dell'autore.

delle cose mutevoli, se questa si suppone eterna nel passato, dovrà essere attribuita - come subito si comprende - alle stesse leggi di variazione temporale; nel qual caso, come si sa, le ragioni non determinano gli stati (a meno che per necessità assoluta o metafisica non si implichi il contrario) ma governano le loro variazioni temporali.

D'altronde, per spiegare un pò più chiaramente in quale modo dalle verità eterne, sia da quelle essenziali che da quelle metafisiche, traggano origine le verità temporali contingenti o fisiche, per prima cosa dobbiamo conoscere precisamente questo: cosa possa esistere piuttosto che nulla; quale sia nelle cose possibili, e nella stessa possibilità, ovvero essenza, l'esigenza dell'esistenza, o (per così dire) la pretesa ad esistere e, per completare il discorso, quale sia l'essenza del tendere per sé all'esistenza. Da questo segue che tutti i possibili, sia che esprimano l'essenza sia la realtà possibile, tendono a pari diritto all'esistenza per la quantità di essenza o di realtà, ovvero per il grado di perfezione che essi contengono; infatti la perfezione non è altro che la quantità di essenza.

Da qui si comprende davvero chiarissimamente che da infinite combinazioni di possibilità e possibili sequenze di queste, esiste quella mediante la quale il massimo di essenza, cioè di possibilità, perviene all'esistenza; sempre che sia lecito supporre che vi sia nelle cose un principio di determinazione che discenda da una condizione di massimo o di minimo e a meno che non si dica per assunto che il massimo effetto sia prodotto proprio da un minimo.

Ed è in questo ambito, ovvero per così dire nel territorio in cui si può edificare nel modo che è più agevole e in cui le varietà delle forme corrispondono alla moltitudine e comodità degli edifici e all'eleganza delle camere, che possono darsi il tempo e lo spazio, o per dirla in altri termini, la recettività o capacità del mondo. Le cose andando come in certi giochi in cui, dovendo tutti i posti a tavola essere occupati secondo certe regole, alla fine, a meno di non usare qualche trucco, vieni escluso dal posto che potevi o volevi ottenere proprio tu che cercavi di indurre gli altri a lasciarlo libero.

D'altra parte v'è un criterio con cui il riempimento si ottiene nel modo più facile. Così ad esempio se poniamo si sia stabilito che vi è un triangolo per cui nessun'altra ragione a determinarne le proprietà sia lecita, se ne dedurrà che esso è equilatero; e posto che ci si debba condurre da un punto a un altro, in modo che nessuna ulteriore determinazione del cammino sia lecita, si sceglierà la via più facile ovvero la più breve; allo stesso modo, come già supposto, se l'ente prevale sul non ente, ovvero se c'è una ragione perché esista qualcosa piuttosto che niente, o che dalla possibilità si debba passare all'atto, da questo, purché nulla possa ulteriormente determinarsi, seguirà che esistono quante più cose è possibile secondo la capacità di tempo e luogo (ovvero dell'ordine possibile di ciò deve esistere), proprio come si devono stipare i tasselli affinché una certa area ne contenga quanti più è possibile.

Da ciò si capisce chiaramente in quale modo nella stessa origine delle cose si eserciti una certa Matematica Divina o un Meccanismo metafisico, e abbia luogo la determinazione del massimo: come l'angolo retto che resta determinato tra tutti gli angoli della geometria, e come i liquidi che comunque versati si autocompongono nella forma di massima capienza, cioè la sferica, ma ancor più generalmente come accade nella stessa comune meccanica che da più corpi pesanti interagenti si generi proprio il moto per cui la discesa complessiva risulta massima. Infatti tutti i possibili tendono ad esistere con pari diritto per ragione di realtà, così come tutti i gravi tendono a scendere con pari diritto per ragione di gravità⁶, cosicché come qui si manifesta il moto nel quale si dà la massima discesa dei gravi, allo stesso modo là si manifesta il mondo per il quale si dà la massima produzione di possibile.

Così già dalla metafisica otteniamo una necessità fisica: per quanto infatti il mondo non sia metafisicamente necessario, poiché il contrario implica contraddizione o assurdità logica, è tuttavia fisicamente necessario o determinato in modo tale che il contrario implicherebbe imperfezione o assurdità morale. E come la possibilità è il principio dell'essenza, così la perfezione o grado di essenza (in virtù della quale i compostibili sono molteplici) è il principio dell'esistenza. Da cui risulta nel contempo in quale modo si dia la libertà nell'autore del mondo e come convenga che egli faccia ogni cosa in modo determinato: perché egli agisce movendo dal principio della sapienza o perfezione. Si capisce allora che l'indifferenza origina dall'ignoranza e che quanto più uno è sapiente tanto più è orientato verso la massima perfezione.

⁶ Si noti come la gravità sia intesa come "ragione" piuttosto che come forza.

4. La meccanica del principio variazionale

Per illustrare come il pensiero filosofico di Leibniz fosse coordinato alla sua visione del mondo materiale, riportiamo nel seguente paragrafo la traduzione di un suo articolo di fisica, scritto 15 anni prima del testo riportato nel paragrafo precedente.

Leibniz si proponeva di determinare le leggi della meccanica assumendo come fenomeni fisici di riferimento quelli ottici, sulla base della convinzione che la luce sia formata da corpuscoli e non invece da onde, come già ritenevano altri autori, ad esempio Christian Huygens (1629-1695).

Per questa ragione, Leibniz si trovò nella necessità di reinterpretare in chiave meccanica il *principio del minimo tempo di propagazione dei raggi luminosi* di Fermat (1601-1665). Ciò lo obbligò ad assumere che le particelle di luce si muovano più velocemente nel mezzo con maggiore indice di rifrazione, giustificando questa erronea assunzione con l'argomento che i mezzi trasparenti più densi costringono le particelle a muoversi con maggiore velocità e senza attrito attraverso spazi più stretti. Egli giunse così a formulare il *principio della via più facile o di minima resistenza*, implementandolo matematicamente mediante la condizione che la somma dei prodotti *velocità × spazi percorsi*, oppure *impulsi × spazi percorsi*⁷, sia minima. In questo testo Leibniz fa presente di avere creato il calcolo differenziale proprio allo scopo di calcolare i massimi e i minimi delle funzioni.

La stessa assunzione circa la maggiore velocità delle particelle di luce nei mezzi densi fu assunta da Maupertuis 62 anni più tardi, che ripropose l'identica derivazione di Leibniz col nome di *principio di minima azione*, evitando tuttavia di darne una giustificazione fisica perché giudicava insensata la nozione di “resistenza” introdotta da Leibniz.

5. Principio Unico di Ottica, Catottrica e Diottrica⁸

L'ipotesi primaria di questa scienza comune, dalla quale si determina la direzione di tutti i raggi luminosi in modo geometrico, può formularsi in questo modo:

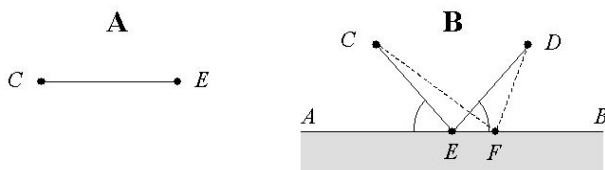


Fig.3.

La luce perviene da un punto raggiante al punto che dev'essere illuminato attraverso la via più facile tra tutte quelle possibili, che in primo luogo deve essere determinata rispetto alle superfici piane (Fig.3, 4) e poi adattata alle concave o alle convesse considerando i piani tangenti ai punti d'incidenza.

Non trovo qui tuttavia la ragione di certe irregolarità, che forse hanno luogo nella generazione dei colori, e di altri fenomeni straordinari che non ci si aspetta di trovare nella pratica dell'ottica.

Quindi nell'Ottica semplice, il raggio diretto dal punto raggiante C al punto che dev'essere illuminato E perviene per la via più breve, purché non vi sia un mezzo interposto, cioè lungo la linea retta CE (Fig.3A).

Nella Catottrica l'angolo d'incidenza \widehat{CEA} e quello di riflessione \widehat{DEB} sono uguali. Siano infatti C il punto raggiante, D quello da illuminare, AB il piano dello specchio. Si chiede di determinare il punto dello specchio E che riflette il raggio verso D. Affermo che è quello per cui il cammino totale $CE + ED$ è tra tutti quello minimo, vale a dire il minimo di $CF + FD$, se supponiamo che si fosse assunto un qualunque altro punto dello specchio F. Questo risultato si ottiene se E è assunto in modo che gli angoli \widehat{CEA} e \widehat{DEB} siano uguali, come si constata dalla geometria (Fig.3B). Di questa

⁷Nella fisica moderna questa seconda somma non è altro che l'azione della particella.

⁸Leibniz, G.W. (1682) *Unicum Opticae, Catoptricae & Dioptricae Principium*. Lipsia, *Acta Eruditorum*. Traduzione dell'autore.

dimostrazione si servirono Tolomeo [I sec. d.C.] e altri antichi, e si trova anche altrove, anche presso Eliodoro di Larissa [III sec. d.C.].

Nella Diottrica, i seni EH e EL degli angoli complementari a quelli di incidenza \widehat{CEA} e di rifrazione \widehat{GEB} , conservano sempre lo stesso rapporto, che è la resistenza reciproca tra i mezzi} (Fig.4).

Sia I aria, K acqua oppure vetro, oppure qualche altro mezzo più denso dell'aria, C il punto irradiante nell'aria, G il punto irradiato nell'acqua. Si chiede per quale via avvenga la propagazione da quello a questo, inoltre quale sia il punto E sulla superficie dell'acqua AB , rifrangendosi nel quale il raggio emesso da C raggiunge G .

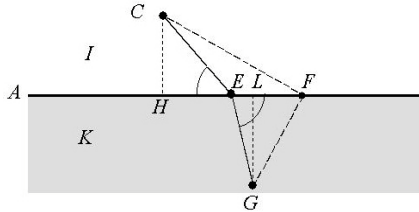


Fig.4

Affinché vi sia che un cammino più facile di tutti, bisogna assumere che un tale E esista. Ora, in mezzi diversi le difficoltà dei cammini stanno nel rapporto composto dalle lunghezze dei cammini e dalle resistenze dei mezzi. Siano m e n due lunghezze che rappresentano le resistenze alla luce rispettivamente nell'aria e nell'acqua; la difficoltà del cammino da C a E equivale all'area del rettangolo formato da CE e m ; quella da E a G all'area del rettangolo formato da EG e n . Quindi, affinché la difficoltà del percorso CEG sia la più piccola di tutte, bisogna che la somma dei rettangoli $CE \times m + EG \times n$ sia la minima tra tutte le possibili, vale a dire la minore di $CF \times m + FG \times n$, essendo F un punto qualunque diverso da E .

Si vuole trovare E date le posizioni dei punti C e G rispetto alla retta AB , pertanto sul piano perpendicolare a questa retta; chiamiamo rispettivamente CH , c , GL , g , e allo stesso modo HL , h , anch'essi dati. Chiameremo y la EH cercata, allora EL sarà $h-y$, e CE , $\sqrt{c^2 + y^2}$, che chiameremo p ; e sarà

$$EG = \sqrt{g^2 + y^2 - 2hy + h^2},$$

che chiameremo q . Allora

$$m\sqrt{c^2 + y^2} + n\sqrt{g^2 + y^2 - 2hy + h^2},$$

cioè $mp + nq$, deve essere la minima tra tutte le possibili che possano essere formulate in modo simile, e si deve cercare la y affinché ciò sia.

Dal mio metodo su massimi e minimi, che riassume meravigliosamente a prima vista quasi senza calcoli tutte le cose finora considerate, bisogna che sia $mqy = np(h - y)$, cioè che np stia a mq come y sta ad $h - y$, cioè che l'area $CE \times n$ stia all'area $EG \times m$ come EH sta a EL . Quindi, ponendo CE ed EG uguali, n , la resistenza dell'acqua per la luce, starà ad m , la resistenza dell'aria, come EH , il seno dell'angolo complementare a quello d'incidenza \widehat{CEA} , sta a EL , il seno dell'angolo complementare a quello di rifrazione \widehat{GEB} nell'acqua; cioè i seni degli angoli complementari staranno nel rapporto reciproco delle resistenze dei mezzi, come era stato asserito. Allo stesso modo, se EL in un esempio o esperimento viene trovato essere due terzi dello stesso EH , lo sarà anche in tutti gli altri, ovunque si assumano C e G rispettivamente nell'aria e nel vetro. Se E sta in aria e G sotto acqua, EL sarà circa $3/4$ dello stesso EH .

Abbiamo quindi ridotto tutte le Leggi dei raggi comprovate dall'esperienza a pura geometria e calcolo, per applicazione di un unico principio che, se le cose sono considerate correttamente, è desunto da una causa finale: infatti, né il raggio uscente da C va a cercare in quale modo giunto al punto E esso possa pervenire a G piuttosto che a D attraverso la via più facile, né essere portato ad essi proseguendo lungo la sua direzione; piuttosto, il Fondatore delle cose creò la luce in modo che essa generasse quel bellissimo effetto in virtù della sua stessa natura.

Sbagliano allo stesso modo, quando non dicono cose anche più gravi, coloro che rifiutano le cause finali, come Cartesio nella Fisica, quando anche ammirando la divina sapienza, pretendono di trovare quel principio, per noi bellissimo, come proprietà di quelle cose la cui natura interna non ci è ancora nota abbastanza chiaramente, come se fossimo capaci di spiegarlo facendo uso di cause efficienti prossime, di macchine adibite a produrre quegli effetti secondo gli scopi di un artefice nascosto. Da ciò comprendiamo anche che non bisogna contestare le riflessioni degli antichi su queste stesse cose, come purtroppo si vede fare da parte di alcuni. Piuttosto, è per me assai più

significativo che sommi Geometri come *Snell* e *Fermat*, versatissimi nella Geometria degli Antichi, abbiano trasferito alla Diottrica i metodi che quelli usavano nella Catottrica⁹. Sospetto seriamente che il teorema di *Snell*, che *V.C.Isac Voss* riporta dai suoi tre inediti libri di Ottica, fosse stato trovato applicando un metodo simile (è lecito pensarlo non tanto per opinione, quanto piuttosto per la facilità dei calcolo che qui abbiamo imparato a fare). Dal nostro infatti segue immediatamente quanto ora dimostro.

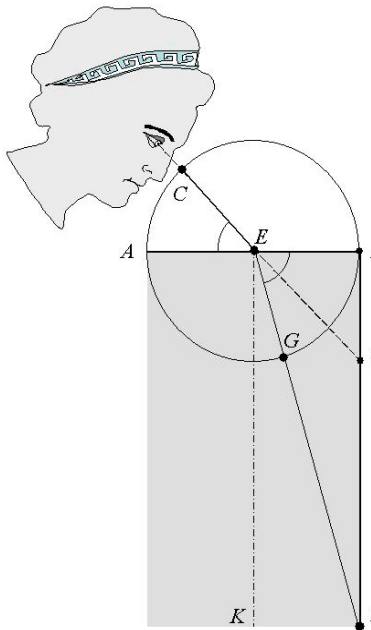


Fig. 5

quelli di rifrazione e incidenza (Fig.4), purché questi rimangano reciproci alle resistenze dei mezzi, sarà sempre lo stesso: questo è il Teorema di *Cartesio*, sebbene *Cartesio* abbia inteso la resistenza dei mezzi in un modo diverso dal nostro, anzi contrario. Per questo stato di cose, non senza ragione, *C.L.Voss*, anch'egli uomo versatissimo in questi studi, considerando questa convergenza di conclusioni sospetta che *Cartesio* abbia visto il Teorema di *Snell* quando si trovava a Batavia; osserva anzi che egli fosse solito sorvolare sui nomi degli autori, e porta l'esempio dei Vortici del Mondo, ai quali *Giordano Bruno* e *Giovanni Keplero* si erano tanto applicati che sembrò fosse mancato loro soltanto questo vocabolo.

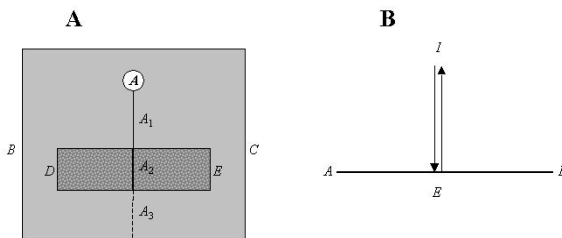


Fig.6

nell'acqua, o nel vetro, che nell'aria. Quando tuttavia si supponga il contrario, ciò a cui si viene ad acconsentire assai più ragionevolmente, applicando il nostro principio della via più facile si giunge alla medesima conclusione. Da questo *Fermat* giustamente dedusse che *Cartesio* non si rendesse veramente conto della ragione del suo Teorema. Anche l'analogia, con la quale si sforza di illustrare la sua spiegazione, è poco adatta allo scopo.

Data una sferetta *A* (Fig.6A) sopra una tavola levigata *BC* in moto verso il punto *A*₁, arrivata a metà del suo percorso incontra la parte di tavola *DE*, foderata con un tappeto, dove corre più

Si tracci un cerchio *CBG*, di centro *E*, raggio *EC* oppure *EG*, in modo che il prolungamento di *EC* sulla tangente per *B* capiti in *V* e quello di *EG* in *T*. Sia l'occhio posto in *C* (Fig.5). L'oggetto che sott'acqua è visto in *T*, e lo stesso punto *T*, apparirà essere in *V*, poiché si vede che vediamo lungo la retta *CEV*, mentre in realtà vediamo lungo il percorso spezzato *CET*, è evidente che *EV* è la secante dell'angolo di incidenza \widehat{CEA} come pure dell'angolo a esso uguale \widehat{VEB} ; e che *ET* è la secante dell'angolo di rifrazione \widehat{GEB} . D'altronde, per una nota proprietà di trigonometria, le secanti sono reciproche ai seni degli angoli complementari; quindi *EV* sta a *ET* come *EL* sta a *EH*, vale a dire (per il nostro teorema) come *m* sta a *n*. Ne segue che, una volta che l'occhio *C* si trovi in un mezzo diverso da quello in cui si trova l'oggetto *T*, il raggio che si trova nel mezzo dell'oggetto (l'acqua) che appare come *EV*, starà al raggio vero *ET* nel mezzo dell'oggetto (acqua) come la resistenza *m* del mezzo dell'occhio (l'aria), sta alla resistenza *n* nel mezzo dell'oggetto (acqua). Purché tale rapporto sia sempre lo stesso, rimanendo i mezzi sempre gli stessi, lo stesso rapporto tra il raggio vero *ET* e l'apparente *EV* sarà sempre lo stesso, come stabilisce il Teorema di *Snell*. Allo stesso modo, il rapporto tra *EL* e *EH* dei seni degli angoli complementari a

Accadde che *Cartesio*, nell'intento di dimostrare questo suo Teorema con le sue proprie forze, incappasse in grandi difficoltà: giacché infatti vedeva il raggio *CE* portato da aria in acqua, qui rifrangersi in *EG*, e così spostarsi verso la perpendicolare *EK* in modo da rendersi più simile al raggio la cui azione era più forte, appunto quello perpendicolare; ipotizzando che esso incontrasse meno resistenza

⁹ Il sesto capitolo degli *Elementi* di Euclide, in cui era trattata la *Diottrica*, è andato perduto.

lentamente in A_2 . Dunque egli valuta allo stesso modo che il vetro, o qualsiasi altro corpo solido, influenzerà meno che in aria i raggi luminosi tanto più quanto più il mezzo sarà ruvido. Ma (sorvolando sul fatto che anche per lo stesso *Cartesio* le particelle d'acqua sono piuttosto molli) basta considerare il caso in cui la sferetta proveniente da A_2 , superato il tappeto DE e pervenuta nuovamente su una porzione di tavola levigata in A_3 , non recupera la velocità iniziale che aveva in A_1 prima di incontrare il tappeto; mentre invece un raggio luminoso, procedendo da un mezzo più resistente a uno meno resistente, simile a quello iniziale, entrando nuovamente in quello, recupera lo stato iniziale, supponendo che le superfici separatrici dei due mezzi simili, il primo e l'ultimo (quello emittente, questo ricevente), siano piane e parallele. Così esso riceverà durante la seconda rifrazione una direzione parallela a quella che aveva prima dalla rifrazione precedente.

Quando dunque il corpuscolo giunge da C a E lungo la retta CE (Fig.7), e per il moto composto di due, quello orizzontale, come CI oppure HE , per il quale viene da CH a IE , e quello perpendicolare, come CH oppure IE , per il quale viene da CI ad HE - entrambi provenendo da C e terminando in E - e venendo in virtù del suo impulso orizzontale da CH verso IE lungo la retta CI oppure HE , non già in opposizione ma parallelamente alla retta AB , il moto orizzontale si conserverà intatto tanto nella direzione quanto nella velocità, e quanto tempo impiegherà per venire da CH a IE , impiegherà anche per venire da IE a DR , posto che gli intervalli tra CH e IE , o tra IE ed DR , siano rispettivamente uguali.

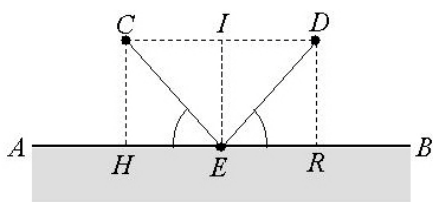


Fig.7

Invero, il moto perpendicolare proveniente da CI verso HE torna indietro nella direzione contraria mantenendo la stessa velocità, in modo da impiegare lo stesso tempo per tornare indietro da ER a ID , purchè sia ER guale allo stesso HE e DR allo stesso CH . I triangoli CHE e DRE saranno simili e uguali, e pertanto l'angolo \widehat{DEB} sarà uguale all'angolo \widehat{CEA} .

Tutto ciò apparirà ancora più chiaro se assumiamo che il percorso nel tratto CID parallelo alla superficie AB , fermo restando il parallelismo tra CH e DR , incida sulla stessa AB in HR , mentre nel frattempo il corpuscolo nello stesso tratto CI si porta da C a I ; per cui in realtà il moto totale del corpuscolo sarà lungo la diagonale CE .

D'altra parte, il percorso nel tratto CID , rimbalzando sulla superficie solida AB , ritornerà con la stessa velocità e direzione con cui veniva, impiegando lo stesso tempo a ritornare in CID , mentre nel frattempo, per legge del moto, il corpuscolo continua a muoversi nella stessa direzione e con uguale velocità, e di nuovo venga in CID in tempi uguali, mentre nel frattempo il corpuscolo, continuando il moto attraverso lo stesso tratto continuerà con la stessa velocità; e pertanto, se ID è uguale CI , esso perviene da I a D nello stesso tempo, dato che, se in tempi uguali sono percorsi spazi uguali, allora la velocità rimane la stessa; cosicché il corpuscolo componendo il suo moto nel tratto ID col quello nello stesso tratto verso E , ritornando, come sappiamo, da HR verso CD , si porterà da E in D lungo la retta ED .

Per spiegare la rifrazione bisogna considerare che dove si osserva che il mezzo è più resistente alla luce (tuttavia senza opacità), si vede che esso impedisce maggiormente la diffusione della luce, ovvero il suo sparpagliamento nel mezzo, che si potrà allora dire meno illuminabile, dato che la luce per sua natura splende quando diffonde. Per contro, quando più la luce influenza in modi ugualmente distribuiti le parti del mezzo che illumina, ovvero dove comunica la sua energia cinetica¹⁰ ad un maggior numero di più piccole particelle del luogo illuminato, ivi il mezzo sarà più illuminabile e resisterà meno alla luce. Da cui, dove le parti del mezzo affetto dalla luce sono più rigide ed esigue, o meno spazi rimangono tra esse per altra materia non influenzabile dalla luce, si dirà che il mezzo è più illuminato. Invero dai principi della Meccanica si deduce che ovunque un urto è impresso simultaneamente da più corpi, cede ai singoli corpi meno energia di quanta ne ederebbe se fosse colpito da solo uno di essi; allo stesso modo accade che quanto più il mezzo è resistente alla diffusione della luce, vale a dire in proporzione ad un numero decrescente di parti affette, tanto più le singole parti saranno affette: nelle più illuminabili in misura maggiore, ma più debolmente, a causa del più languido impulso impresso.

¹⁰ Leibniz contrappose al principio di conservazione della quantità di moto di Cartesio il principio di conservazione dell'energia cinetica (*vis*), che nei vecchi trattati di meccanica era chiamata forza viva.

Assumendo ora il moto del corpuscolo in luogo del raggio, e supponendo che ora il corpuscolo venga da G in E (Fig.4), dove incide nel mezzo - ciò che ne ritarderà la velocità o piuttosto l'impulso in proporzione, poniamo, di una volta e mezza - allora se nel primo mezzo KE veniva da G a E in un certo tempuscolo, allo stesso modo nel nuovo mezzo EI verrà da E in C in un tempuscolo una volta e mezza più grande, posto che EC e GE siano uguali, dovunque si trovi precisamente C .

Ma quando in GK siano condotte le parallele a LE e alla velocità orizzontale, sotto il primo punto d'ingresso del corpuscolo nel nuovo mezzo EI la superficie separatrice dei mezzi non sarà di ostacolo (talmente radente è qui infatti il moto orizzontale LEH). Inoltre, nello stesso primo istante d'ingresso, vale a dire nel punto E (considerando il corpuscolo puntiforme come se la larghezza del raggio fosse quasi nulla), bisognerà determinare la pendenza della linea CE una volta per tutte; e dovrà essere inizialmente assunta una volta per tutte in modo tale che la componente orizzontale della velocità rimanga la stessa; e quale sia stata inizialmente assunta all'ingresso nel nuovo mezzo, tale in questo rimanga.

Dunque il corpuscolo, che andando nel primo mezzo da G a E , in un certo tempuscolo aveva percorso in direzione orizzontale l'intervallo GK o LE (tra GL e KE); quello stesso ora, in un tempuscolo e mezzo, durante il quale deve andare da E a C , percorre nella stessa direzione l'intervallo EH , ovvero IC , (compreso tra EI e HC), che deve allora essere una volta e mezza maggiore di quello precedente LE ; poiché, uguale rimanendo la velocità orizzontale (che non viene mutata all'istante della rifrazione), gli spazi sono come i tempi, quindi EH sta rispetto a EL in rapporto diretto dei tempi, ovvero reciproca delle velocità, vale dire ancora *reciproca delle resistenze*. Infatti, nel caso della luce è evidente che, per effetto della resistenza del mezzo che impedisce la diffusione, la velocità, o piuttosto l'impulso, e che si affievolisce per la sua maggiore facilità a diffondersi in singole parti.

Per contro, il raggio recupera la sua energia cinetica, come pure la sua direzione, quando giunge nuovamente nel mezzo dove la diffusione è minore, essendo qui il raggio impedito dal frangersi in un maggior numero di parti più piccole. Il quale recupero, come abbiamo su osservato, Cartesio non aveva potuto spiegare mediante il suo paragone col tappeto o altri corpi ruvidi.

6. Il principio di minima azione di Maupertuis

Nella prima metà del '700 le idee di Leibniz esercitarono una grande influenza sulla cultura tedesca, facendo inizialmente molti proseliti; ma ben presto, via via che lo spirito dei tempi andava mutando, incontrarono forti opposizioni specialmente da parte degli illuministi e dei libertini, fino a diventare oggetto di derisione e sarcasmo.



Fig.8 François-Marie Arouet Voltaire (1694-1778).

Si pensi ad esempio come nel suo celebre *Candide*, Voltaire contrapponga beffardamente alla filosofia dell'*armonia prestabilita* e del *migliore dei mondi possibili*, che al suo tempo era insegnata dagli epigoni di Leibniz, in particolare da Christian Freiherr von Wolff (1679-1754), la realtà di un mondo che per molti, con buona ragione, non poteva essere altrimenti qualificato che come il peggiore dei possibili.

Naturalmente, sia i cartesiani sia i newtoniani nutrivano un'avversione congenita per la teoria delle cause finali, e gli illuministi francesi non avevano certo molta indulgenza per l'apriorismo metafisico. Tuttavia il prestigio intellettuale di Leibniz era tale che anche gli avversari più accaniti del suo sistema filosofico non poterono sottrarsi del tutto al fascino del razionalismo metafisico, tanto che alcuni di essi, pur con cautele e riserve, continuarono a meditare sulla possibilità di basare le leggi della fisica su un principio di ottimalità. Il primo serio risultato in questa direzione fu ottenuto dallo scienziato-filosofo bretone Jean Philippe Moreau barone di Maupertuis.

In una dissertazione presentata all'*Académie Royale de Science* di Parigi nel 1744¹¹, Maupertuis enunciava il celebre *principio di minima azione* con queste parole:

Allorché un corpo è portato da un punto a un altro, si richiede per questo una certa azione: questa azione dipende dalla velocità che ha il corpo e dallo spazio che esso percorre; ma essa non è nè la velocità nè lo spazio separatamente presi. La quantità di azione è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità del corpo e quanto più lungo è il cammino che esso percorre; essa è proporzionale alla somma degli intervalli spaziali ciascuno moltiplicato per la velocità con cui il corpo lo percorre (poiché non si ha che un solo corpo, qui si fa astrazione dalla massa). E' proprio questa quantità di azione che costituisce la vera spesa della Natura; quella che essa si industria di risparmiare al massimo possibile nel movimento della luce.



Fig.9. Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759).

È chiaro che questo principio è tanto diverso dal principio variazionale enunciato 62 anni prima da Leibniz che l'unica differenza che si riesce a ravvisare è che Maupertuis chiamava *minima azione* quello che Leibniz aveva chiamato *via più facile* o *di minima resistenza*, la quale produrrebbe effetti simili a quelli causati dal restringimento dei canali nel movimento senza attrito dei fluidi. E non si può nemmeno dire che Maupertuis non conoscesse i termini della questione e non avesse mai sentito parlare dell'idea di Leibniz, dal momento che egli stesso ne fa menzione nel commento alla sua celebre comunicazione¹² e che persino il matematico svizzero Leonardo Eulero fece seguito nello stesso anno alla comunicazione di Maupertuis per affermare che il principio enunciato da Leibniz era diverso perché aveva un significato diverso. In realtà, come si deduce dalle parole di Eulero, la formulazione di Leibniz era matematicamente equivalente a quella di Maupertuis, differendo soltanto per i modi con cui entrambi interpretavano - in modo erroneo - il principio variazionale del minimo tempo di Fermat. Probabilmente Leibniz avrebbe avuto una fortuna migliore se, come sarebbe stato più corretto, invece di chiamarlo di *minima resistenza* lo avesse chiamato di *minima costrizione*; tanto più che circa un secolo e mezzo più tardi questa seconda denominazione sarebbe stata usata da Carl Friedrich Gauss (1777-1855) per spiegare il moto dei sistemi vincolati senza attrito.

La diatriba circa la priorità della scoperta teorica arrivò al punto che lo stesso re di Prussia Federico II ordinò un'indagine chiarificatrice che favorì Maupertuis e che si concluse con un processo e la condanna al rogo in una piazza di Berlino del libello di Krönig che rivendicava la priorità di Leibniz. Oggi, possiamo serenamente dire che il misconoscimento della priorità di Leibniz fu dovuto principalmente al fatto che allora, in Prussia, gli eredi del pensiero di Leibniz erano invisibili agli uomini di scienza e ai potenti di sentimenti illuministi.

Forse vale la pena di rendere un pò di giustizia spiegando perché sia giusto attribuire a Leibniz il merito storico della scoperta.

Leibniz era profondamente convinto che le leggi della meccanica potessero essere derivate da un principio di ottimalità e fu indotto dall'esempio di Fermat ad assumere la validità generale del principio di ottimalità nella forma del "principio della via più facile". Egli s'ingegnò di raggiungere quell'obiettivo sulla base della similitudine tra la riflessione di un raggio luminoso e il rimbalzo di un corpo elastico su una superficie rigida, come si evince dal testo riportato nel paragrafo 5. In quello scritto Leibniz notava che lo stesso

¹¹ Maupertuis, J.P., (1768) *De la Nature*, Oeuvres de Maupertuis, Vol. IV, Lyon.

¹² E' ben nota l'avversione che anche il re Federico II ed Eulero provavano per Wolff, esegeta della teoria leibniziana dell'armonia prestabilita.

Cartesio, che pure rigettava il metodo delle cause finali, ipotizzando che la luce fosse costituita di corpuscoli elastici, apriva la via alla soluzione del problema. Il problema stava allora nel capire cosa succeda ai corpuscoli luminosi quando entrano in un mezzo rifrangente, per risolvere il quale Leibniz sembra proprio tentare di arrampicarsi sugli specchi. L'errore che permise a Leibniz di estendere il principio del caso diottrico alla meccanica fu identico a quello di Maupertuis: assumere che la luce sia costituita da particelle di un fluido materiale e che la velocità di queste particelle sia *proporzionale all'indice di rifrazione*, e non inversamente proporzionale, come aveva assunto Fermat.

Maupertuis e Leibniz credevano entrambi che la luce fosse più veloce nei mezzi più densi, il primo perché in questi essa incontrerebbe una minore resistenza, il secondo perché incontrerebbe una maggiore costrizione, erroneamente denominata "resistenza". Comunque entrambi erano convinti che il principio di Fermat dovesse essere riformulato in modo che la funzione da minimizzare fosse la somma dei prodotti degli spazi percorsi per le velocità, della particella, o meglio per la sua quantità di moto. È notevole il fatto che Newton e Leibniz inventarono indipendentemente l'uno dall'altro il calcolo differenziale per scopi opposti; il primo per implementare il principio delle "cause efficienti" nella forma di equazioni differenziali del moto, il secondo per implementare il principio delle "cause finali" nella forma di un calcolo di massimo o minimo di una funzione dei cammini possibili di un sistema fisico che partono da uno stato iniziale a uno finale, per esempio delle storie possibili dell'universo fisico tra l'istante iniziale della creazione e quello finale dell'assoluta perfezione o qualcosa di simile.

Chiaramente, lasciando da parte le questioni metafisiche, la formulazione di Leibniz non differisce sostanzialmente da quella di Maupertuis. In ogni modo, lasciando da parte anche la storica controversia, bisogna sottolineare che il grande merito di aver applicato correttamente ed estesamente il principio variazionale all'analisi dei fenomeni meccanici non spetta né a Leibniz né a Maupertuis ma a Eulero, il quale, subito dopo aver generosamente attribuito il merito della scoperta all'ambizioso barone di Maupertuis, procedette per conto suo allo sviluppo matematico dell'idea, in un modo che solo un matematico della sua grandezza poteva fare, dimostrando con calcoli precisi che le leggi di Newton sono deducibili da un principio variazionale più generale di quello assunto da Leibniz e Maupertuis. In tal modo egli dimostrava che metodo delle cause finali era perfettamente equivalente a quello delle cause efficienti di Cartesio e Newton.



Fig.10. Leonhard Paul Euler (1707-1783)

Alcuni decenni più tardi, Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), matematico torinese, nonché membro dell'Assemblea Costituente francese prima e dopo il periodo della rivoluzione, e in seguito nominato senatore a vita da Napoleone, ebbe cura di riformulare l'intera questione in termini puramente analitico-matematici nell'ambito di una teoria generale dei sistemi meccanici, avendo cura di eliminare ogni riferimento all'ormai screditata speculazione metafisica circa il principio di ottimalità, alla cui bimillenaria tradizione si doveva tuttavia quel prodigioso risultato. Nacque così la *Meccanica Analitica*, che ancor oggi è ritenuta il caposaldo fondamentale della fisica teorica.

Il principio di Eulero e Lagrange è oggi noto come *principio variazionale di azione stazionaria*, perché si applica ponendo la condizione che l'integrale di una funzione di stato del sistema fisico, nota come *funzione lagrangiana*, lungo un generico cammino del

sistema, abbia variazione nulla. In pratica si tratta della condizione che il cammino che rappresenta l'evoluzione spazio-temporale del sistema fisico sia un minimo relativo della funzione dell'integrale di azione.

7. Il determinismo ben temperato di Eulero

Il razionalismo metafisico d'ispirazione leibniziana fu fortemente avversato dagli illuministi francesi e tedeschi. In sede scientifica l'asprezza dello scontro fu ben documentata da Eulero di cui riportiamo qui alcuni passi tratti dalle sue epistole¹³ :

- Considerazioni sul principio dell'Armonia Prestabilita.

Ma contro il sistema dell'armonia prestabilita si rivolge ancora un'altra obiezione; si dice che in esso la libertà degli uomini è interamente distrutta. Difatti se i corpi degli uomini sono macchine simili a un orologio, tutte le loro azioni sono una necessaria conseguenza della loro struttura. Così quando un ladro taglia la borsa, il movimento che egli compie con le proprie mani è anch'esso un effetto necessario della macchina del suo corpo, tanto quanto lo è il movimento delle lancette del mio pendolo che indicano in questo momento le nove..... [Da Lettera 85].

- Circa la popolarità della filosofia leibniziana

... A questo proposito se n'è avuto qui in altri tempi uno splendido esempio, quando, al tempo del defunto re [Federico II, imperatore di Prussia], Wolff insegnava a Halle il sistema dell'armonia prestabilita [di Leibniz]. Il re volle informarsi di questa dottrina che faceva molto rumore, e un cortigiano rispose a Sua Maestà che tutti i suoi soldati non erano, secondo questa dottrina, altro che delle pure macchine; e che quando alcuni di loro disertavano questa era una conseguenza necessaria della loro struttura per cui si aveva torto a punirli come si avrebbe avuto torto a punire una macchina per aver prodotto questo o quel movimento. Il re s'irritò talmente davanti a questa relazione che subito ordinò di scacciare Wolff da Halle, pena la morte per impiccagione se vi si fosse trovato ancora, passate ventiquattr'ore. Questo filosofo si rifugiò allora a Marburgo, dove poco tempo dopo ebbero occasione di parlargli [Da Lettera 85].

- Circa la visione deterministica del mondo fisico.

Se il mondo contenesse solo corpi, e se tutti i cambiamenti che vi si verificano fossero conseguenze necessarie delle leggi del movimento, conformemente alle forze con cui i corpi agiscono gli uni sugli altri, tutti gli avvenimenti sarebbero necessari e dipenderebbero dal primo ordine che il Creatore avrebbe stabilito fra i corpi del mondo; in modo che, una volta stabilito questo ordine, sarebbe impossibile che in seguito si verificassero avvenimenti diversi da quelli che effettivamente vi avvengono. In questo caso il mondo sarebbe incontestabilmente una semplice macchina, simile a un orologio che, una volta caricato, produce in seguito tutti i movimenti con i quali misuriamo il tempo.... Tale sarebbe lo stato del mondo se in esso non esistessero altro che corpi, e dove si potrebbe dire che tutti gli avvenimenti vi avvengono per una necessità assoluta, essendo ciascuno di essi un effetto necessario della costruzione del mondo, a meno che Dio non vi faccia miracoli.

La stessa cosa potrebbe verificarsi anche nel sistema dell'armonia prestabilita, quantunque vi si ammettano gli spiriti. Secondo questo sistema gli spiriti non agiscono affatto sui corpi, i quali producono tutti i loro movimenti e tutte le loro azioni esclusivamente in virtù della loro struttura, una volta stabilita; in modo che quando sollevo il mio braccio, questo movimento è un effetto della dell'organizzazione del mio corpo, necessario quanto lo è il movimento delle ruote di un orologio...

Ma se alle anime degli uomini e degli animali si accorda qualche potere sui loro corpi, per produrvi movimenti che la sola organizzazione di corpi non avrebbe prodotti, il sistema del mondo non è più una semplice macchina, e tutti gli avvenimenti non vi avvengono necessariamente, come nel caso precedente.

Nel mondo vi saranno allora una doppia specie di avvenimenti, gli uni, quelli su cui gli spiriti non potranno esercitare nessuna influenza, saranno corporei o dipendenti dalla macchina, come i

¹³ Leonhard Paul Euler, *Lettere a una Principessa Tedesca*, (Pietroburgo, 1770), Boringhieri Ed., Torino (1958).

movimenti e i fenomeni celesti, che avvengono altrettanto necessariamente dei movimenti di un orologio, e dipendono esclusivamente dall'originaria fondazione del mondo; gli altri, che dipendono dall'anima degli uomini o da quella degli animali, unita ai loro corpi, non saranno più necessari, come i precedenti, ma dipenderanno dalla libertà e dalla volontà di questi esseri spirituali." [Da Lettera 89].

- *Considerazioni particolareggiate sull'azione dell'anima sul corpo e viceversa.*

Poiché l'anima è la parte più importante del nostro essere vale la pena di cercare di approfondirne le operazioni. Vostra Altezza si ricorderà che l'unione fra l'anima e il corpo comprende in sé una duplice influenza: da una parte l'anima percepisce e sente tutto ciò che avviene in un certo punto del cervello e dall'altra essa ha il potere di agire su questa stessa parte del cervello producendovi certi movimenti. Gli anatomisti si sono dati molto da fare per scoprire questo punto del cervello, a ragione chiamato dimora dell'anima; non certo che l'anima vi si trovi attualmente, poiché essa non è in nessun luogo, ma perché ad esso è legato il suo potere di agire. Si può dire che l'anima vi è presente, ma che non vi esiste o che la sua esistenza vi sia limitata. Tale punto del cervello è senza dubbio quello in cui fanno capo tutti i nervi; ora gli anatomisti sostengono che questo avviene in una determinata parte del cervello da loro chiamata *corpo calloso*. È dunque questo corpo calloso ciò che noi possiamo considerare come la dimora dell'anima; e il Creatore ha accordato a ogni anima un tale potere sul corpo calloso del suo corpo, che essa non soltanto vi scorge tutto ciò che avviene, ma può anche produrvi certe impressioni. Noi dobbiamo dunque riconoscere qui una duplice azione: quella con cui il corpo agisce sull'anima e quella con cui l'anima agisce sul corpo; azioni entrambe infinitamente diverse da quelle con cui i corpi agiscono sugli altri corpi.

Per questa unione dell'anima con il corpo calloso, l'anima si trova nel più stretto legame con l'intero corpo, mediante i nervi che sono distribuiti per tutto il corpo. I nervi sono fibre meravigliose e, secondo ogni apparenza, riempite di un fluido estremamente sottile; cosicché il minimo mutamento che esse provano a una estremità, è nello stesso istante comunicato all'altra estremità del cervello ove è la dimora dell'anima. Reciprocamente la minima impressione, che l'anima produce sulle estremità dei nervi del corpo calloso, si trasmette in un istante per tutta l'estensione di ogni nervo, ed è per questo mezzo che i muscoli e le membra del nostro corpo sono messe in movimento e obbediscono ai comandi dell'anima.

Questa meravigliosa costruzione pone il nostro corpo in uno strettissimo legame con tutti gli oggetti esterni, vicini e lontani; i primi possono agire sul nostro corpo o per immediato contatto, come avviene nel senso del tatto e del gusto, o per le loro esalazioni come avviene nell'odorato. I corpi più lontani invece agiscono sull'udito, quando vibrano e suscitano nell'aria vibrazioni che pervengono a colpire i nostri orecchi; e sulla vista, quando sono illuminati e trasmettono nei nostri occhi i raggi di luce, essi pure consistenti in una certa vibrazione prodotta in quel mezzo più sottile dell'aria che si chiama etere. È così che i corpi, sia vicini che lontani, possono agire sui nervi del nostro corpo e produrre certe impressioni del corpo calloso, dal quale l'anima trae le sue percezioni.

Da tutto ciò che produce un'impressione sui nostri nervi risulta un certo cambiamento nel cervello, di cui l'anima si accorge, acquistando l'idea dell'oggetto che ha causato tale cambiamento. Vi sono dunque a tal proposito due cose da esaminare: l'una corporea o materiale, cioè l'impressione o il mutamento causato nel corpo calloso del cervello, l'altra immateriale e spirituale, cioè la percezione o la conoscenza che l'anima ne ricava: è per così dire la contemplazione di ciò che avviene nel corpo calloso, a dove tutte le nostre conoscenze traggono la loro origine... [Lettera 94].

8. Il destino quantistico del principio di concorrenza dei possibili

Nato dalla filosofia idealistica di Socrate e Platone come principio di ottimalità, il principio variazionale evolve storicamente fino a diventare con Eulero e Lagrange il più potente criterio di formulazione delle leggi fisiche, oggi universalmente noto come principio di azione stazionaria. Il percorso storico di questa formulazione teorica è caratterizzato dall'evoluzione del concetto di *stato fisico*, il quale, nella metafisica e nella fisica configurazionale di Aristotele, si presenta come *attuazione esclusiva del possibile* - "esclusiva" nel senso che l'attuazione di uno stato impedisce quella di ogni altro stato possibile - e che nella metafisica spazio-temporale di Leibniz diventa *concorrenza esclusiva dei cammini possibili*. Si tratta in realtà dell'evoluzione di un concetto logico fondamentale

per la fisica che riguarda, in ultima analisi, il modo di rappresentazione degli stati di un sistema fisico classico¹⁴.

La portata scientifica del principio di concorrenza dei possibili può essere compresa solo oggi in seguito allo sviluppo della meccanica e della logica quantistiche. La sua rilevanza si manifesta nel fatto che la formulazione metafisica originaria anticipò, sebbene in una forma



Fig.11. P.A.M. Dirac (1902-1984) e R.P. Feynman (1918-1988), Varsavia, 1962.

primitiva e idealizzata, il nucleo di tutta la problematica relativa alla struttura logica della fisica moderna.

L'apparato concettuale della metafisica aristotelico-leibniziana, combinando la nozione di concorrenza esclusiva dei possibili col principio di ottimalità, produsse una struttura formale che oggi appare equivalente al limite logico-classico e insieme ottico-geometrico del principio di sovrapposizione degli stati della meccanica quantistica, ovvero del principio quantistico di *interferenza ondulatoria dei possibili*.

La relazione tra i cammini possibili della fisica classica e quelli della meccanica quantistica fu messa in evidenza da Paul Adrien Maurice Dirac nel 1930¹⁵ e posta a fondamento di un nuovo approccio alla meccanica quantistica (detto dell'*integrale di cammino*) da Richard Phillips Feynman nel 1948¹⁶.

Nella fisica classica, la relazione tra due eventi osservabili E_1 ed E_2 , uno *causa* e l'altro *effetto*, ad esempio il lancio di un proiettile nel punto P_1 al tempo t_1 e il suo arrivo nel punto P_2 al tempo t_2 , avviene tramite una sequenza continua di eventi perfettamente osservabili (almeno in linea di principio), che nel caso più semplice sono distribuiti lungo il cammino rettilineo percorso dal proiettile con velocità uniforme (Fig.12).

Nella rappresentazione quantistica dello stesso fenomeno, tra l'evento causa e l'evento

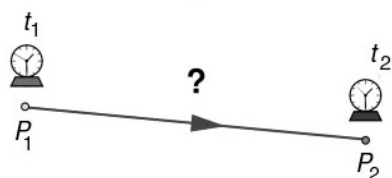


Fig.12. Cammino attuale

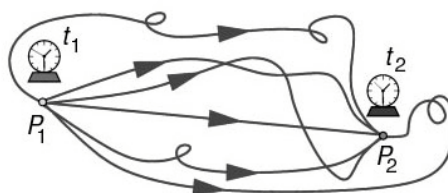


Fig.13. Cammini possibili

effetto non ha luogo una successione continua di eventi osservabili ma la propagazione di uno stato fisico inosservabile, precisamente lo *stato quantistico* del sistema, che per questa ragione Hans Reichenbach (1891-1953) ha definito un *interfenomeno*¹⁷.

Lo stato fisico del sistema è matematicamente rappresentato dalla somma di un numero infinito di funzioni complesse, ognuna delle quali descrive un'onda di probabilità che si propaga lungo uno degli infiniti cammini possibili (Fig.13). La somma di tutte le funzioni

¹⁴ Si veda il mio saggio sulle *Logiche della Fisica*. Rubrica di Filosofia scientifica.

¹⁵ P.A.M. Dirac, (1930) *I principi della meccanica quantistica*. Ed. Italiana Bollati Boringhieri, 1971.

¹⁶ R.P.Feynman, (1948) *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*. *Rev. Mod. Phys.* 20:367-387.

¹⁷ Reichenbach, H. (1954) *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*. Einaudi, Torino.

complesse associate ai diversi cammini rappresenta la sovrapposizione di un insieme infinito di onde che interferiscono costruttivamente in certi punti e distruttivamente in certi altri, dando luogo alla formazione di massimi e minimi di probabilità (Fig. 14).

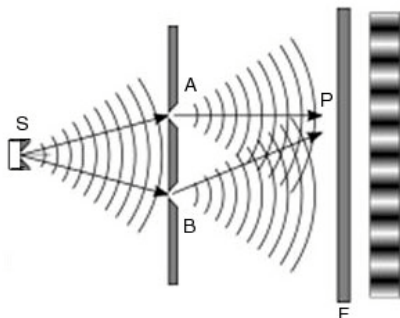


Fig. 14. L'interferenza dei possibili

Poiché le fasi di tutte queste onde sono proporzionali alle azioni di Eulero-Lagrange calcolate lungo i cammini, si ottiene il risultato che la regione in cui l'interferenza è massimamente costruttiva è proprio quella che si trova nell'intorno del cammino classico della particella. In tal modo, se le lunghezze d'onda di tutte le componenti ondulatorie sono molto piccole, la regione massimamente costruttiva diventa filiforme. In queste condizioni, l'evoluzione interferenomenica dello stato fisico si presenta come la linea oraria

tracciata da un punto che evolve nello spazio degli stati classico. In tal modo, sembra che tra tutti i cammini quantistici possibili sopravviva quello descritto dal cammino classico. Questo comportamento è simile all'approssimazione ottico-geometrica della propagazione ondulatoria della luce. Abbiamo dunque questo sorprendente risultato: che il principio leibniziano di concorrenza esclusiva dei possibili è rimpiazzato nella meccanica quantistica dal *principio d'interferenza ondulatoria dei possibili*.

La differenza sostanziale tra la concezione classica e quella quantistica del possibile è che la prima fu usata da Eulero e Lagrange per spiegare l'evoluzione deterministica dei sistemi fisici mentre la seconda è usata per spiegare quella indeterministica.

Un'immediata conseguenza di questo profondo cambiamento della logica della fisica riguarda le conseguenze filosofiche della nuova concezione del possibile. I possibili della fisica classica avevano necessariamente bisogno di una giustificazione metafisica, giacché il determinismo rigoroso della fisica classica non ammette nessun'altra possibilità al di fuori di quella che si realizza nel corso degli eventi. Ciò fu chiaramente compreso da Leibniz che a questo proposito giunse ad enunciare le seguenti proposizioni:

La possibilità delle cose, anche quando esse non esistono in atto, è realmente fondata nell'esistenza divina, perché se Dio non esistesse non potrebbe esserci nemmeno nulla di possibile, mentre i mondi possibili sono dall'eternità nelle idee dell'intelletto di Dio [*Causa Dei*, 8].

Ora, poiché v'è un'infinità di universi possibili nelle idee di Dio, e non ne può esistere che uno solo, è necessario che vi sia una ragione sufficiente della scelta di Dio, la quale lo determini a scegliere l'uno piuttosto che l'altro [*La monadologia*, 53].

Si comprende allora che la differenza filosofica fondamentale tra le possibilità classiche e quelle quantistiche è che le prime possono esistere solo nel mondo delle idee, o più banalmente come pure rappresentazioni del pensiero, mentre le seconde devono essere assunte come veramente esistenti in natura, in termini più filosofici come sostanze interferenomeniche del mondo fisico.

Del resto, se dobbiamo assumere che le possibilità quantistiche siano sovrapponibili e interferiscano tra loro generando il corso degli eventi più probabili, allora bisogna ammettere che esse *coesistano* come fattori generativi dei fenomeni naturali. Ma se ammettiamo che esse co-esistano allora dobbiamo anche ammettere che esse *esistano* come entità naturali non osservabili e non come entità ideali.